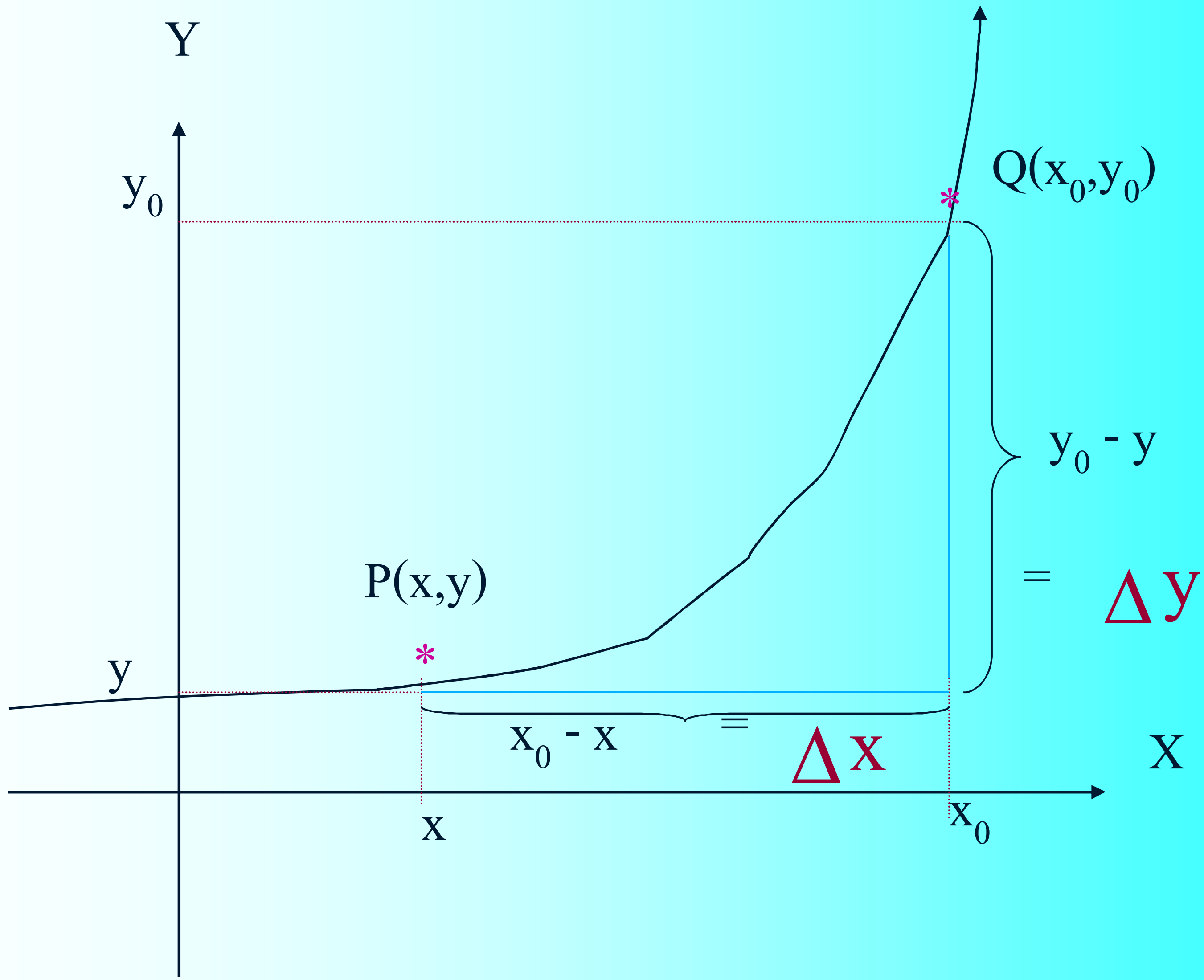
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

(Differentiation of Function)

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

คืออะไร

กำหนดให้ $y = f(x)$



$\Delta x = x_0 - x$ เรียกว่า ส่วนที่เปลี่ยนค่าของตัวแปร x

$$\Delta y = y_0 - y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

เรียกว่า ส่วนที่เปลี่ยนค่าของฟังก์ชัน

อัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชันต่อการเปลี่ยนแปลงค่าของx

คือ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

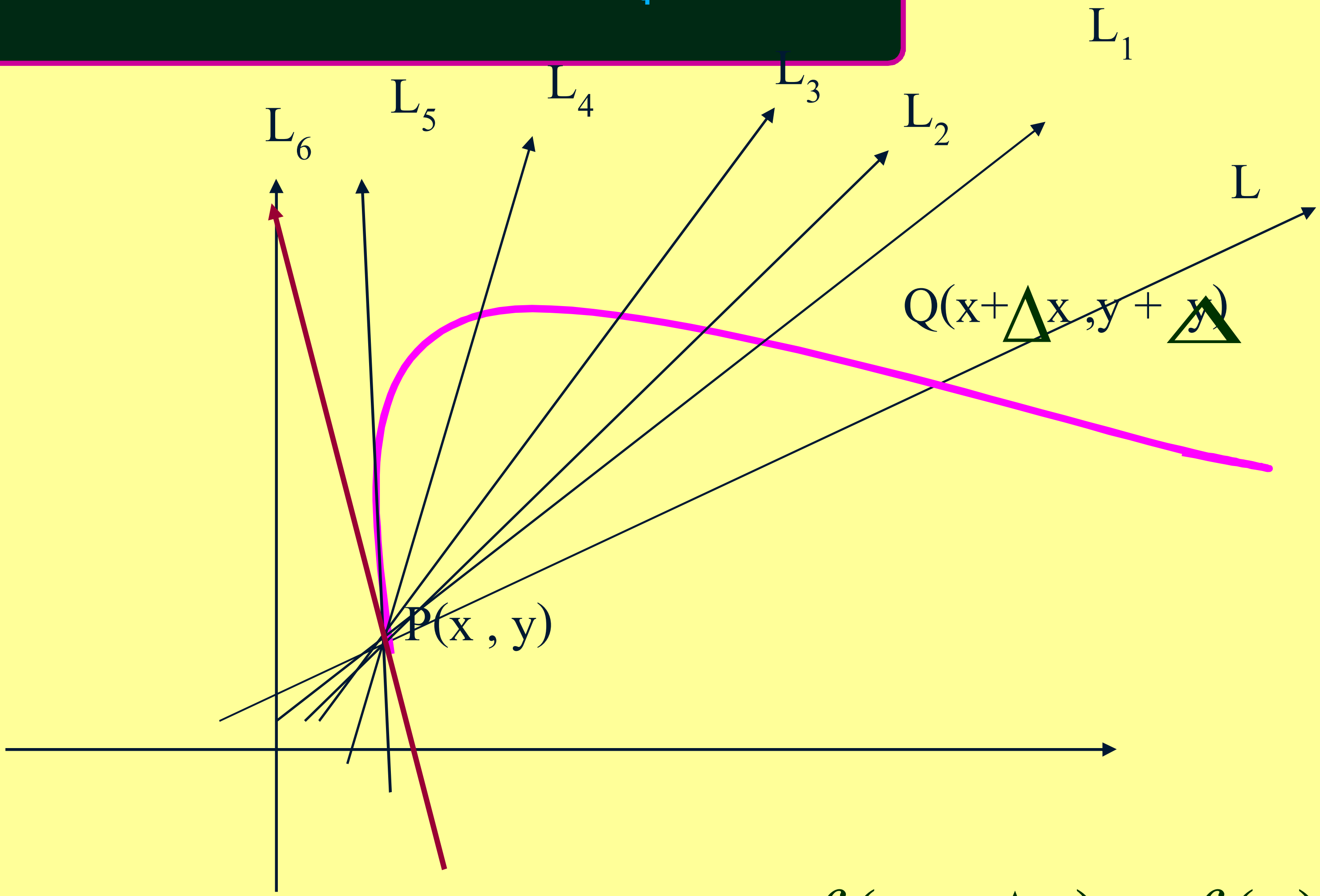
ถ้า $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตนี้ว่า

อนุพันธ์ของฟังก์ชันy = f(x) เทียบกับ x

อธิบายในรูปความชันของเส้นตรง
ที่สัมผัสเส้นกราฟของฟังก์ชัน

(วาดกราฟประกอบคำอธิบาย)

ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์



ความชันของเส้นตรง L $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดP คือ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง

กำหนดสมการของเส้นโค้ง คือ $y = x^2 - 3x$

จงหาความชัน ความเอียงและสมการเส้นสัมผัส

เส้นโค้ง ณ จุด (2 , -2)

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด(2 , -2)

ก็คือ $f'(2) = \tan\theta$

จาก $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ดังนั้น $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{[x^2 - 3x] - [2^2 - (3)(2)]}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}}$$

ดังนั้น $\tan \theta = \lim_{x \to 2} (x - 1)$ = 2-1 = 1

นิยาม

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ y = f(x) เราจะเรียก

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตมีค่าว่า **อนุพันธ์ของ f ที่ x** และจะกล่าวว่า

f มีอนุพันธ์ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f'(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ $D_x f(x)$

หรือ y' หรือ $\boxed{\frac{dy}{dx}}$ หรือ $D_x y$

สำหรับอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ จะเขียนแทนด้วย

$$f'(x_0)\ ,\ y'\Big|_{x=x_0}\ ,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \text{ หรือ } \left.\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\right|_{x=x_0}$$

ตัวอย่าง กำหนด $y = f(x) = \sqrt{x}$ จงหา

ก. $f'(x)$ ข. สมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 4$

วิธีทำ ก. จากนิยามได้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

#

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

ข. ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $x = 4$ คือ $f'(4) = \frac{1}{4}$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = \sqrt{x}$ ที่ผ่านจุด $(4, 2)$

และ มีความชันเป็น $\frac{1}{4}$ คือ $y - 2 = \frac{x-4}{4}$ หรือ

$$\boxed{y = \frac{x}{4} + 1}$$

#

2.2 การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กฎการหาอนุพันธ์มาจากนิยามของอนุพันธ์ที่กล่าวมาแล้ว

กฎที่ 1 $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กฎที่ 2 $\frac{dx}{dx} = 1$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

กฎที่ 3 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก

และ x เป็นจำนวนจริง

กฎที่ 4 ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กฎที่ 5 ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เราจะได้ว่า

1. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ (กฎอนุพันธ์ของผลบวก)

2. $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ (กฎอนุพันธ์ของผลต่าง)

3. $\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (กฎอนุพันธ์ของผลคูณ)

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ เมื่อ $v \neq 0$ (กฎอนุพันธ์ของผลหาร)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = 1 + x + 2x^2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 + x + 2x^2)$$

$$= \frac{d}{dx}1 + \frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}2x^2$$

$$= 1 + 2(2x)$$

$$= \boxed{1 + 4x}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = 1 + x + 2x^2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 + x + 2x^2)$$

$$= \frac{d}{dx}1 + \frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}2x^2$$

$$= 1 + 2(2x)$$

$$= \boxed{1 + 4x}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = (x^2+7x)(1+x^4)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ วิธีที่ 1

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+7x)(1+4x^4)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^6+7x^5+x^2+7x)$$

$$= \frac{dx^6}{dx} + \frac{d}{dx}7x^5 + \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}7x$$

$$= 6x^5 + 7\frac{dx^5}{dx} + 2x + 7\frac{dx}{dx}$$

$$= \boxed{6x^5 + 35x^4 + 2x + 7}$$

วิธีที่ 2 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+7x)(1+x^4)$

$$= (x^2+7x)\frac{d}{dx}(1+x^4) + (1+x^4)\frac{d}{dx}(x^2+7x)$$

$$= (x^2+7x)(4x^3) + (1+x^4)(2x+7)$$

$$= 4x^5 + 28x^4 + 2x + 2x^5 + 7x^4 + 7$$

$$= \boxed{6x^5 + 35x^4 + 2x + 7} \qquad \#$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x+3}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(4x+3) \quad - \quad (4x+3)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)(4) \quad - \quad (4x+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4-8x^2-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{4-6x-4x^2}{(x^2+1)^2}}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^3 - \frac{1}{3-x^2}$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - \frac{1}{3-x^2}\right)$

$$= \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3-x^2}\right)$$

$$= 3x^2 - \frac{(3-x^2)(0)-(-2x)}{(3-x^2)^2}$$

$$= 3x^2 - \frac{2x}{(3-x^2)^2}$$

ดังนั้น $f'(2) = 3(2)^2 - \frac{2(2)}{(3-4)^2} = 12-4 = 8$ #

ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วงเปิด I และมีอนุพันธ์ที่จุด a โดยที่ $a \in I$ แล้วจะได้ว่า มีความต่อเนื่องที่จุด a

ข้อสังเกต

1. ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ a จะได้ว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ a
2. ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ a , f อาจไม่มีอนุพันธ์ที่ a ก็ได้

กฎที่ 6 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบและ $x \neq 0$ จะได้ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

อนุพันธ์อันดับสูง

เช่น ให้ $y = 3x^4$ อนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ $\frac{dy}{dx} = 12x^3$

อนุพันธ์อันดับสองคือ $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = 36x^2$

อนุพันธ์อันดับสามคือ $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]\right] = 72x$

ถ้า $y = f(x)$ แล้ว อนุพันธ์อันดับต่างๆอาจเขียนสัญลักษณ์เป็น

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \quad ,\ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

ตัวอย่าง กำหนด $y^4+3y-4x^3=5x+1$ จงหา y''

วิธีทำ $$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-12x^2 = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4y^3+3)\frac{d}{dx}(12x^2+5) - (12x^2+5)\frac{d}{dx}(4y^3+3)}{(4y^3+3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3+3)(24x) - (12x^2+5)(12y^2)\frac{dy}{dx}}{(4y^3+3)^2}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ลงใน $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่หาไว้แล้ว

จะได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4y^3+3)(24x) - (12x^2+5)(12y^2)\left(\frac{12x^2+5}{4y^3+3}\right)}{(4y^3+3)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24x(4y^3+3)^2 - 12y^2(12x^2+5)^2}{(4y^3+3)^3} \qquad \#$$

2.3 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

กฎลูกโซ่ ให้ $h = f \circ g$ แล้ว

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

นั่นคือถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว $y = h(x)$

และ

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $u = u(x)$ และ $y = u^n$,n เป็นจำนวนเต็มบวก

จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}u^n\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \#$$

กฎที่ 7 ถ้า $u = u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $y = u^n$ เมื่อ n เป็นค่าคงที่

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{d}{dx}F\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ที่จุด $x = 1$ เมื่อ $F'(0) = 2$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

เมื่อ $x = 1$ ได้ $u = 0$ โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= F'(u)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= F'(u)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=1} = F'(0)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right) = F'(0) = \boxed{2}$ #

สำหรับฟังก์ชันประกอบซึ่งมีฟังก์ชันมากกว่า 2 ฟังก์ชันมาประกอบกัน เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ได้เช่นกันเช่น $y = f\circ g\circ h(x)$ จะได้ว่า

$$y'(x) = (f\circ g\circ h)'(x) = (f\circ(g\circ h))'(x) = f'(g\circ h(x))(g\circ h)'(x)$$

$$= f'(g\circ h(x))\, g'(h(x))\, h'(x)$$

ซึ่งถ้าเราให้ $u = g\circ h(x)$, $v = h(x)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot g'(v)\cdot v'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง ให้ $y = \dfrac{1+u}{1-u}$, $u = \dfrac{1}{v}$, $v = x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \left(\frac{(1-u)-(1+u)(-1)}{(1-u)^2}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right)(2x)$$

$$= \frac{2}{(1-u)^2}\left(-\frac{2x}{v^2}\right) = \boxed{-\frac{4x}{v^2(1-u)^2}}$$

#

2.4 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และกำหนด y อยู่ในรูปสมการที่ไม่ได้เขียนค่า y ไว้ชัดเจน เราสามารถหาค่าอนุพันธ์ได้โดยการเขียนรูปสมการใหม่

แต่ในกรณีที่ การหาค่า y ในเทอมของ x อาจจะทำไม่ได้ หรืออาจจะยุ่งยากเกินไป ดังนั้นถ้าเราต้องการหา $\frac{dx}{dy}$ เราทำได้โดยคิด x เป็นตัวแปรตาม และ y เป็นตัวแปรอิสระ นั่นคือพิจารณา x เป็นฟังก์ชันของ y

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด

ก. $3x^5 - 3x^4y^3 + 4y^2 = 0$

ข. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 3x^5 + xy^6$ เมื่อ $x=1, y=1$

วิธีทำ ก. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับ x ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}(3x^5 - 3x^4y^3 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3\frac{d}{dx}x^5 - 3(y^3\frac{d}{dx}x^4 + x^4\frac{d}{dx}y^3) + 4\frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$15x^4 - 3(4x^3y^3 + 3x^4y^2\frac{dy}{dx}) + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3y^3 - 15x^4}{8y - 9x^4y^2}$$ #

ข. $$\frac{d}{dx}(x+y)^2 - \frac{d}{dx}(x-y)^2 = \frac{d}{dx}(3x^5 + xy^6)$$

$$2(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) - 2(x-y)\frac{d}{dx}(x-y) = 15x^4 + y^6 + 6xy^5\frac{dy}{dx}$$

$$2(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) - 2(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) - 6xy^5\frac{dy}{dx} = 15x^4 + y^6$$

$$(4x - 6xy^5)\frac{dy}{dx} = 15x^4 + y^6 - 4y$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^4 + y^6 - 4y}{4x - 6xy^5}$$

เมื่อ $x = 1, y = 1$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = -6$ #

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 จะได้ว่า มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1} โดย f^{-1} หาอนุพันธ์ได้แล้ว จะมีวิธีหาอนุพันธ์ของ f^{-1} ได้ดังนี้

เมื่อให้ $y = f(x)$ และ $x = f^{-1}(y)$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $y = f\left(f^{-1}(y)\right)$

เมื่อหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ y จะได้ว่า

$$1 = f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y) = f'(x)\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = \sqrt[3]{y^2+1}$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$x = \left(y^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}(2y)$$

$$= \frac{2y}{3\left(y^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

ดังนั้น $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(y^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}{2y}}$$ #

2.6 ดิฟเฟอเรนเชียล (Differentials)

ในหัวข้อนี้ เราจะให้นิยาม dx, dy แยกออกจากกัน เพื่อประโยชน์ในการศึกษาเรื่องอินทิกรัล ที่จะได้กล่าวต่อไป

นิยาม ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ Δx เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x

ก. ดิฟเฟอเรนเชียลของ x เขียนแทนด้วย dx กำหนดโดย $dx = \Delta x$

ข. ดิฟเฟอเรนเชียลของ y หรือ f เขียนแทนด้วย dy หรือ df

กำหนดโดย $\boxed{dy = df = f'(x)dx}$

ตัวอย่าง จงหาดิฟเฟอเรนเชียลของ y ที่กำหนดให้

วิธีทำ (1) $y = x^2 + 3x - 5$

เนื่องจาก $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 3x - 5\right) = 2x + 3$$

ดังนั้น $$\boxed{dy = \left(2x + 3\right)dx}$$ #

(2) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

เนื่องจาก $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + 4}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 4\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

ดังนั้น $$\boxed{dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}dx}$$ #

2.7 ทฤษฎีบทของโรลล์และทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

ทฤษฎีบทของโรลล์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$
2. f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b)
3. $f(a)=f(b)=0$

แล้วจะมี c ในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $\boxed{f'(c)=0}$

ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (The Mean - Value Theorem)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน

ถ้า 1. f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

2. f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b)

แล้วจะมี c ในช่วง (a,b) ซึ่ง $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ตัวอย่าง จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย หาค่า c ใน $[1,2]$

เมื่อกำหนดให้ $f(x)=x^2$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x)=x^2$ บนช่วงปิด $[1,2]$

จะได้ว่า $$f^{/}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^1}{1}=3$$

และได้ว่า $f'(x)=2x$ จึงได้ว่า $f'(c)=2c$

ดังนั้น $2c=3$

$$\boxed{\therefore \quad c=\frac{3}{2}}$$

#

ตัวอย่าง จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย ประมาณค่าของ $\sqrt{40}$

วิธีทำ ให้ $f(x)=\sqrt{x}$

จะได้ว่า $f'(x)=\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

ถ้าให้ $a=36$, $b=40$ และเลือก $c=36$ สำหรับการประมาณค่า

จากทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะได้ว่า $f'(36)\approx\dfrac{f(40)-f(36)}{40-36}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{36}}\approx\frac{\sqrt{40}-\sqrt{36}}{4}$$

$$\therefore \quad \sqrt{40}\approx\sqrt{36}+\frac{4}{2\sqrt{36}}\approx 6.33$$

#

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม

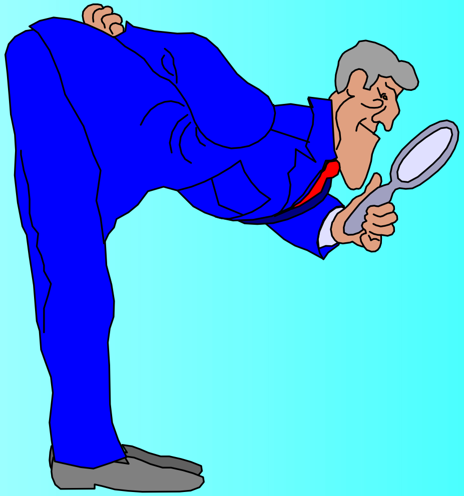
$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$$, a เป็นค่าคงตัวที่ > 0

$$\frac{da^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

, a เป็นค่าคงตัวที่ > 0

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$



$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$, เมื่อ x =/= 0

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$,เมื่อ u =/= 0

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = 2^{x} \cdot \log_{3} 4x$$